



Fonction inverse, fonction homographique.

Livre p.122.

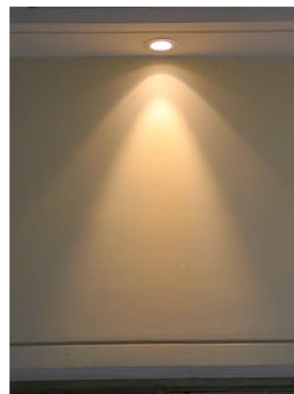
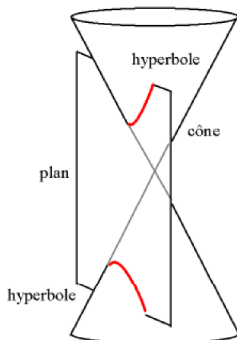
Objectifs :

- Découvrir la fonction inverse et ses premières propriétés
- Découvrir les expressions rationnelles (fonctions homographiques)

Aperçu historique :

Nous avons déjà étudié plusieurs "fonctions de référence" : les fonctions affines (de degré 1) au Chapitre ??, puis la fonction carré et les fonctions polynômes du second degré au Chapitre ??. Nous allons ici nous intéresser à la fonction inverse, définie pour $x \neq 0$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

La représentation graphique de la fonction inverse est une hyperbole ; c'est la "trace" d'un plan qui couperait un cône parallèlement à son axe ; on peut en avoir un aperçu en plaçant un spot lumineux près d'un mur : le mur vertical "coupe" le cône de lumière selon une hyperbole.



1. La fonction inverse

Définition 12.1 La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel non nul associe son inverse.

$$\text{Pour } x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété 12.1 La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration Soit a et b deux réels strictement négatifs tels que $a < b$. Étudions le signe de $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$:

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$. Or a et b sont négatifs donc $ab > 0$. De plus $a < b$ donc $b - a > 0$. Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ est égal au quotient de deux réels positifs ; c'est donc un réel positif. Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$; ainsi, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Les nombres a et b et leurs images sont donc rangés dans l'ordre inverse : la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

On démontrerait de même que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque :

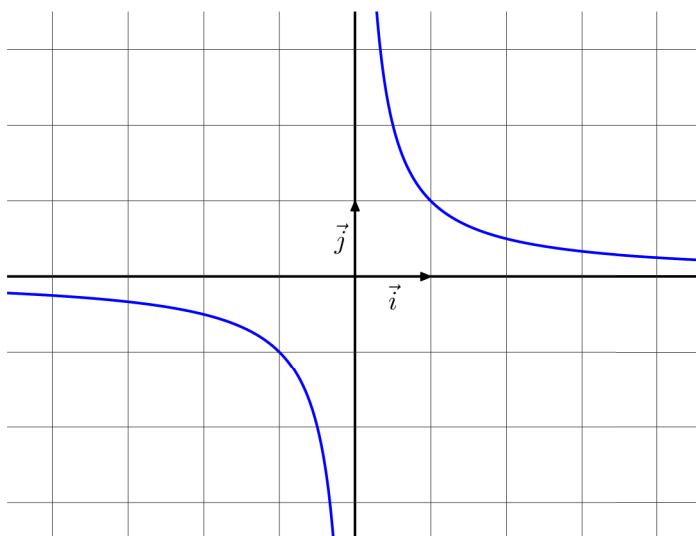
Attention ! La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

En effet, on a : $-2 < 2$ et $\frac{1}{-2} < \frac{1}{2}$: les images de -2 et 2 sont rangées dans le même ordre que -2 et 2 .

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$	0

Courbe représentative :



La courbe représentative de la fonction inverse est une *hyperbole* de centre O et d'asymptotes (Ox) et (Oy) .

2. Expressions rationnelles

Exemple Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrer que pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.
- Étudier les variations de f sur $] -\infty; 2[$ puis sur $]2; +\infty[$.
- En se limitant à l'ensemble $[-3; 2[\cup]2; 7]$, dresser le tableau de variations de f , puis un tableau de valeurs et enfin la courbe représentative de f dans un repère.

- $f(x)$ existe pour $x-2 \neq 0$ soit $x \neq 2$: $x = 2$ est une valeur interdite pour f .

Donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

- On a : $3 + \frac{1}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x-6+1}{x-2} = \frac{3x-5}{x-2} = f(x)$.

- Le point d'intersection A de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées a pour abscisse $x_A = 0$ et donc pour ordonnée $y_A = f(0) = \frac{5}{2}$. Donc $A\left(0; \frac{5}{2}\right)$.

Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses ont pour ordonnée 0. On résout donc l'équation $f(x) = 0$. Un quotient est nul si et seulement si son dénominateur n'est pas nul et son numérateur est nul. Donc pour $x \neq 2$, $f(x) = 0$ si et seulement si $3x - 5 = 0$ soit $x = \frac{5}{3}$. Donc $\mathcal{C}_f$ coupe (Ox) en un seul point : $B\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

- Pour étudier les variations de f , on utilise l'expression de $f(x)$ trouvée à la question 2.

Soit a et b deux réels tels que $a < b < 2$.

On a : $a < b < 2$

Donc : $a - 2 < b - 2 < 0$

Donc : $\frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2}$

Donc : $3 + \frac{1}{a-2} > 3 + \frac{1}{b-2}$

D'où : $f(a) > f(b)$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; 2[$.

De même, soit a et b deux réels tels que $2 < a < b$.

On a : $2 < a < b$

Donc : $0 < a - 2 < b - 2$

Donc : $\frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2}$

Donc : $3 + \frac{1}{a-2} > 3 + \frac{1}{b-2}$

D'où : $f(a) > f(b)$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$.

5. On en déduit le tableau de variations :

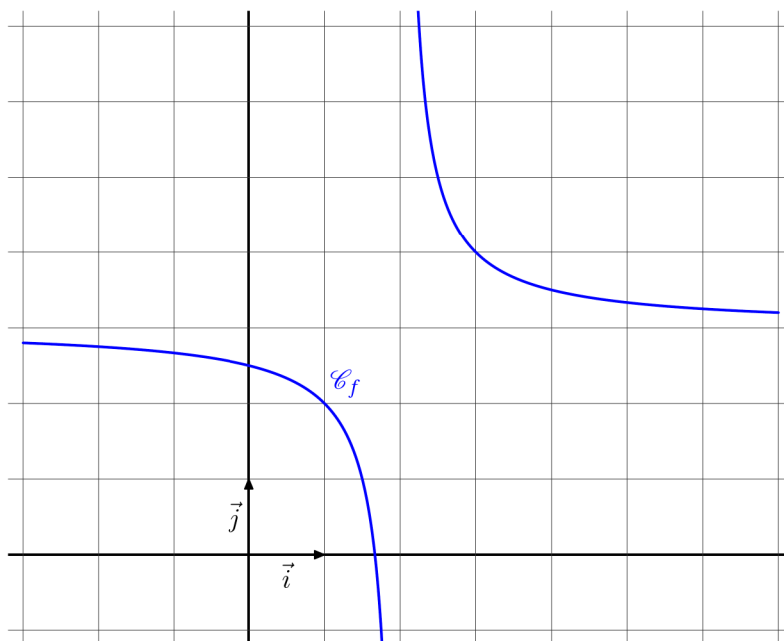
Tableau de variations :

x	-3	2	7
f	2,8		3,2

Tableau de valeurs :

x	-3	0	1	3	4	7
$f(x)$	2,8	$\frac{5}{2}$	2	4	$\frac{7}{2}$	3,2

Courbe représentative :



Définition 12.2 Une fonction f est dite *homographique* s'il existe des réels a , b , c , et d , avec $c \neq 0$, tels que f puisse s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ pour tout réel x n'annulant pas le dénominateur.

Exemple La fonction f définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ vue à l'exemple précédent est une fonction homographique. Son domaine de définition est $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

Remarque :

Soient f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, et D_f son domaine de définition.

Pour tout $x \in D_f$, on a :

$$ax+b = \frac{a}{c}(cx+d) + (b - \frac{ad}{c}), \text{ donc :}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)}{cx+d} + \frac{(b - \frac{ad}{c})}{cx+d}, \text{ d'où :}$$

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{(b - \frac{ad}{c})}{cx+d}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$f(x) - \frac{a}{c} = \frac{(b - \frac{ad}{c})}{cx+d}$ En posant $\alpha = b - \frac{ad}{c}$, $X = cx+d$ et $Y = f(x) - \frac{a}{c}$, cette dernière égalité devient $Y = \frac{\alpha}{X}$; l'allure et le sens de variation seront donc les mêmes que ceux d'une fonction inverse, éventuellement multipliée par une constante.